

Statystyka wielowymiarowa

ćwiczenia 6

Zadanie 14

Dany jest dwuwymiarowy wektor losowy $[X, Y]$ taki, że $\sigma_X^2 > 0$ i $\sigma_Y^2 > 0$. Zmienna losowa $\beta_0 + \beta_1 X$ jest *najlepszym liniowym predyktorem* zmiennej losowej Y jeśli

$$[\beta_0, \beta_1] = \arg \min \{E[a + bX - Y]^2 : a, b \in R\}$$

Niech $L[Y | X] = \beta_0 + \beta_1 X$

1. Wyznacz β_0 i β_1 . Wsk.

$$E[a + bX - Y]^2 = E[(a + b\mu_X - \mu_Y) + b(X - \mu_X) - (Y - \mu_Y)]^2$$

Jakie wartości mają te współczynniki, gdy zmienne X i Y są nieskorelowane?

2. Pokaż, że $L[Y | X]$ jest jedyną liniową funkcją $l(X)$ zmiennej losowej X spełniającą warunki:

$$\begin{aligned}El(X) &= EY \\Cov(X, l(X)) &= Cov(X, Y)\end{aligned}$$

Znajdź warunek konieczny i dostateczny aby $L[Y | X] = c$.

3. Pokaż, że $L[Y | X]$ jest jedyną liniową funkcją $l(X)$ zmiennej losowej X spełniającą warunki:

$$\begin{aligned}El(X) &= EY \\Y - l(X) &\perp m(X)\end{aligned}$$

dla dowolnej liniowej funkcji $m(X)$ zmiennej losowej X .

4. Pokaż, że

$$V(L[Y | X]) = \sigma_Y^2 \rho^2(X, Y) = Cov(L[Y | X], Y)$$

gdzie $\rho(X, Y)$ jest współczynnikiem korelacji zmiennych X i Y .

5. Oblicz $E[L[Y | X] - Y]^2$. Kiedy ta wartość jest: a) minimalna, b) maksymalna?
6. Pokaż, że:

$$\begin{aligned}L[Y + Z | X] &= L[Y | X] + L[Z | X] \\L[cY | X] &= cL[Y | X]\end{aligned}$$

Zadanie 15

Znajdź $L[Y|X]$ i $E[L[Y|X] - Y]^2$ gdy wektor $[X, Y]$ jest rozłożony jednostajnie:

- a) na trójkącie o wierzchołkach w punktach $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$
- b) na kole jednostkowym o środku w punkcie $(0, 0)$.